

# 基于特征多项式求根法的间谐波估计方法

沈睿佼，杨洪耕

(四川大学电气信息学院 成都 610065)

## A NEW METHOD FOR INTERHARMONICS MEASUREMENT BASED ON ROOTS EIGEN-POLYNOMIAL METHOD

Shen Ruijiao, Yang Honggeng

(Sichuan University, Chengdu 610065, China)

摘要: 传统的 FFT 算法在含有间谐波的情况下存在着频谱泄漏和栅栏效应, AR 谱估计和多信号分类法(MUSIC)法能提高频率分辨率, 但对噪声敏感, 容易产生虚假频率。提出对信号自相关矩阵进行特征值分解, 利用信号子空间和噪声子空间的正交性构造多项式, 进行多项式求根, 得到单位圆上的根进行频率估计的特征多项式求根法, 在此基础上通过三角回归法, 解一超定方程组得到振幅和相位的估计。并与 MUSIC 法在无噪声和有噪声情况下进行仿真比较, 证明了该方法在提高分辨率、提高数据精度的有效性。

关键词: 间谐波; 多信号分类法(MUSIC)法; 特征值分解; 多项式求根

**Abstract:** FFT algorithms in existence is not fit to analyze non-integer harmonics due to its leakage and picket fence effects, AR model spectra estimation and the method of multiple signal classification (MUSIC) can improve the frequency resolution, but are susceptible of the noise and easy to produce false frequencies. A method for interharmonics frequency accurate estimation is presented based on roots eigen-polynomial method. Based on the signal auto-relation matrix eigenvalue decomposition, this method constructs polynomial to estimate the frequency with the roots on unit circularity. The method of triangle regression is also employed to obtain amplitude and phase. Under the non-noise and noise conditions, compared with MUSIC, the simulation results have verified the effectiveness of the algorithm..

**Key words:** interharmonics; multi-signal classification; eigenvalue decomposition; roots polynomial

### 1 引言

随着电力系统的发展以及大量非线性波动负荷, 各种变频调速装置以及各种电力电子装置在电力系统中的广泛应用, 电网的谐波问题日益严重, 同时非整数次谐波——间谐波和次谐波也引起了国内外的广泛关注<sup>[1-3]</sup>。

FFT算法是分析谐波的主要工具, 能够实现整数次谐波的精确分析和检测, 然而该方法在信号中含有间谐波的情况下, 很难实现信号的同步采样, 存在着频谱泄漏和栅栏现象, 从而使检测出谐波的幅值、相角和频率均存在较大的误差<sup>[4-6]</sup>。小波变换具有良好的时频特性, 近几年来, 已有不少文献将其用于电力系统的谐波检测, 但由于不同尺度

的小波函数在频域中存在相互干扰, 当被检测信号中含有频率相近的谐波分量时, 幅值检测方法将失效<sup>[7,8]</sup>。基于AR模型谱估计隐含着数据和自相关函数的外推, 使其分辨率大大提高, 利于间谐波的估计, 但AR模型谱估计对噪声相当敏感, 当有噪声存在时, 分辨率降低, 且可能存在谱线分裂情况<sup>[9]</sup>。多信号分类法(MUSIC)法解决了Pisarenko谐波分解法噪声空间数只能为一, 在多噪声空间存在的情况下产生虚假频率的缺点, 但同样在有噪声的情况下, 尤其是低信噪比时, 检测精度受到较大影响<sup>[10]</sup>。

本文运用信号的自相关矩阵的 Toeplitz 性质, 对相关矩阵进行改进, 使其在低信噪比的情况下也很好的逼近原信号相关矩阵, 再利用矩阵的特征值分解理论, 将信号的自相关矩阵分解为信号子空间和噪声子空间, 利用这两个子空间的正交性构造一多项式, 通过求解此多项式, 得到比 MUSIC 法更高精度的信号频率估计, 在噪声情况下效果更为明显。当得到信号频率后, 可以通过三角回归法, 求解超定方程组得到原信号的振幅和相位。

### 2 特征空间求根法频率估计原理

设采样电压(或电流)信号可表示为

$$x(n) = \sum_{i=1}^M A_i \cos(2\pi f_i n T_s + \varphi_i) + u(n) \quad (1)$$

式中  $x(n)$  为采样信号;  $n$  为采样点数;  $T_s$  为采样间隔;  $M$  为所含整数次和间谐波个数;  $u(n)$  为白噪声项。  $A_i$  为第  $i$  次谐波的幅值;  $f_i$  为第  $i$  次谐波的频率;  $\varphi_i$  为第  $i$  次谐波的初始相角。

## 2.1 复频率信号

由于特征空间求根法定义在复信号上, 所以将(1)式转换为复频率信号, 可以通过实正弦和复正弦的对应关系转换, 也可以借助 Hilbert 变换将原信号移相  $90^\circ$ , 组成解析信号为了便于理解和计算方便, 采用后者转换方法

$$\mathbf{Z}u(n) = u(n) + jHT(u(n)) \quad (2)$$

解析信号的复频率与原信号相同。采用(2)式将(1)式转换成复频率表达式

$$x(n) = \sum_{i=1}^M A_i e^{j(2\pi f_i n T_s + \phi_i)} + u(n) \quad (3)$$

## 2.2 特征空间求根法

### 2.2.1 自相关矩阵修正

设信号  $x(n)$  是由  $M$  各复正弦加白噪声组成, 那么其自相关函数为

$$r_x(k) = \sum_{i=1}^M a_i e^{j\omega_i k} + \rho_w \delta(k) \quad (4)$$

式中  $a_i, \omega_i$  分别是第  $i$  个复正弦的功率及频率,  $a_i = A_i^2, \omega_i = 2\pi f_i / f_s$ ;  $k$  为自相关的相对位移;  $\rho_w$  是白噪声的功率。

如果有  $(p+1)$  个  $r_x(k)$  组成相关矩阵

$$\mathbf{R}_{p+1} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x^*(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{R}_{p+1}$  是共轭对称的 Toeplitz 矩阵。

在噪声尤其是低信噪比的情况下,  $\mathbf{R}_{p+1}$  一般只是对角占优矩阵, 因此可以对其进行改进, 使其更好的接近真实信号自相关矩阵  $\mathbf{R}$ , 即

$$\min \|\mathbf{R} - \mathbf{R}\| \quad (6)$$

利用托别列兹近似方法得:

$$\mathcal{R}(-k) = \frac{1}{p-k} \sum_{i=1}^{p-k} r_{i(i+k)} \quad (7)$$

$$\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}^*(-k)$$

式中,  $p$  为阵元数,  $r_{ij}$  为  $\mathbf{R}_{p+1}$  的元素。则

$\mathbf{R}$  的元素  $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}(i-j)$ 。

### 2.2.2 特征空间多项式求根

利用特征分解理论(详细原理可详见文献[10]), 根据非零特征值和零特征值将特征向量空间分成特征值为  $(\rho_w + \lambda_1), (\rho_w + \lambda_2), \dots, (\rho_w + \lambda_M)$  的信号子空间和每个特征值都是  $\rho_w$  的噪声子空间, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{p+1} &= \mathbf{V}_S \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{V}_S^H + \mathbf{V}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{V}_N^H \\ &= \sum_{i=1}^M (\lambda_i + \rho_w) \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H + \rho_w \sum_{i=M+1}^{p+1} \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{V}_S, \mathbf{V}_N$  分别表示信号子空间特征向量和噪声子空间特征向量。

令

$$\mathbf{P}(z) = [1 \ z \ \dots \ z^{p-1}]^T \quad (9)$$

由特征结构类算法可知,  $\mathbf{P}(\exp(j\omega))$  就是信号向量, 它和噪声子空间的各个向量都是正交的, 因此, 他们的线性组合也是正交的。定义多项式

$$f(z) = \lambda_N \mathbf{P}^H(z) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{P}(z) \quad (10)$$

由以上的定义可知当  $z = \exp(j\omega)$  时, 多项式的根正好位于单位圆上。

同时发现(10)式存在  $z^*$  项, 使求零过程变得复杂, 因此对(10)式作如下修正:

$$f(z) = z^{p-1} \lambda_N \mathbf{P}^T(z^{-1}) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{P}(z) \quad (11)$$

可见多项式  $f(z)$  的阶数为  $2(p-1)$ , 也就是说有  $(p-1)$  对根, 且每对根是相互共轭的关系, 在这些根中, 有  $M$  对共轭根正好分布在单位圆上, 且

$$z_i = \exp(j\omega_i) \quad 1 \leq i \leq M \quad (12)$$

当信号中混有噪声, 数据矩阵存在误差时, 此求根方法不需要借助实现复杂的信号子空间阶数的准确估计方法, 只需求上式的  $M$  个接近于单位圆上的根即可, 则

$$f_i = \arg(z_i) f_s / (2\pi) \quad (13)$$

通过多项式求解得到频率估计, 不会丢失信号信息, 它所丢失的信息是有关噪声的。从另一角度来看, 信号的解受噪声影响很小, 而且多项式的求解精度远远大于在频率轴上的谱峰搜索, 因此该方法能大大提高频率分辨率, 且对噪声不敏感, 得到的频率精度高。

### 2.4 信号幅值和相位的求取

当得到信号的频率成分后, 由(1)式中  $n \geq 2M$ , 所以(1)式利用三角回归法可转换为—超定方程组, 记

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ \cos 2\pi f_1 \Delta & \cos 2\pi f_2 \Delta & L & \cos 2\pi f_M \Delta \\ \cos 2\pi f_1 2\Delta & \cos 2\pi f_2 2\Delta & L & \cos 2\pi f_M 2\Delta \\ M & M & M & M \\ \cos 2\pi f_1 n\Delta & \cos 2\pi f_2 n\Delta & L & \cos 2\pi f_M n\Delta \\ 0 & 0 & L & 0 \\ \sin 2\pi f_1 \Delta & \sin 2\pi f_2 \Delta & L & \sin 2\pi f_M \Delta \\ \sin 2\pi f_1 2\Delta & \sin 2\pi f_2 2\Delta & L & \sin 2\pi f_M 2\Delta \\ M & M & M & M \\ \sin 2\pi f_1 n\Delta & \sin 2\pi f_2 n\Delta & L & \sin 2\pi f_M n\Delta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, L, x_n)^T, \mathbf{u} = (u_0, u_1, L, u_n)^T,$$

$$\mathbf{y} = (y_0, y_1, L, y_{2M})^T,$$

其中,  $y_k = A_k \cos \varphi_k$ ,

$$y_{k+m} = -A_k \sin \varphi_k \quad (k=1, 2, L, M)。$$

则(1)式可写为

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\text{其中 } \mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad (16)$$

从式(17)可以求得  $\mathbf{y}$ , 得到振幅和相位

$$\begin{cases} A_k = \sqrt{y_k^2 + y_{k+M}^2} & (k=1, 2, L, M) \\ \varphi_k = \arctan(-y_{k+M}/y_k) \end{cases} \quad (17)$$

### 3 仿真计算

为验证本文算法的性能, 由于电网中的噪声幅值一般为基波幅值的 0~1%, 所以在无噪声和分别加 30dB、25dB 和 20dB 噪声的情况下, 在 Matlab6.5 中进行 MUSIC 法和本文所述的特征空间求根法进行仿真比较。

设待检测未加噪声信号为

$$x = 0.02 \sin(2\pi 40t + 60^\circ) + 3 \sin(2\pi 50t) \\ + 0.3 \sin(2\pi 100t + 30^\circ) + 0.1 \sin(2\pi 125t + 45^\circ) \\ + 0.2 \sin(2\pi 200t + 25^\circ) + 0.03 \sin(2\pi 210t + 20^\circ)$$

基波频率为 50Hz, 采样频率为 1000Hz, 采样点数  $N = 80$ , 频率变换后的结果如下图 1 所示。

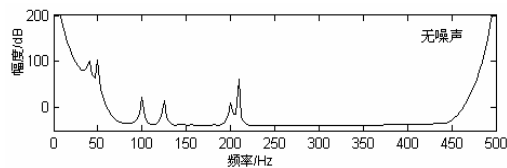
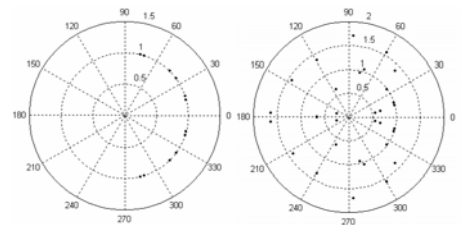


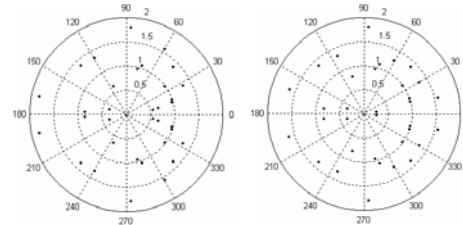
图 1. MUSIC 法谱估计结果

Fig1. Results of spectral estimation with MUSIC method



(a) 无噪声

(b) SNR=30dB



(c) SNR=25dB

(d) SNR=20dB

图 2. 特征空间根的极坐标结果

Fig1. Results of eigen-spatial roots in polar coordinates

在以上采样数据较短的仿真条件下, 利用 FFT 算法分析, 其频率分辨率粗略为  $f_N/N$ , 无法检测出 40Hz 和 210Hz 的频率, 但从上面两图可见, 在同样的数据长度下, MUSIC 法和本文的特征求根法都大大提高了分辨率, 没有出现频谱泄露。

在图 1 中, 同文献[8], 虚线代表

$$-0.25 \times \max \left( 10 \lg \left| \mathbf{P}_{\text{MUSIC}}(\omega) \right| \right)$$

的阈值线, 可以看出, 随着信噪比的降低, MUSIC 法的分辨力也随之降低, 会使频率判断错误, 出现虚

假频率。当信噪比为 30dB 时，虽然间谐波频率估计会有偏差，但没有出现虚假频率，但当信噪比降低为 25dB 和 20dB 时，简谐波频率估计布置出现偏差，还分别出现了 274.1583HZ、280.0823HZ 和 25HZ、90.85Hz、307.4692HZ 的虚假频率。同时，从图 2 中可见，经过本文的对数据自相关矩阵的修正后再进行特征空间求根法的频率估计，同样不需经过信号空间阶数的确定，设定特征多项

式根的阈值  $0.9 \leq |Z| \leq 1.1$ ，即使在低信噪比的情况下，也只有相互共轭的六对根在单位圆附近，这些根的正弧度值，代入(13)式得到较精确的频率估计。

当得到频率估计之后，根据这些已知的频率经过一定的滤波措施，然后通过式(16)的计算，得到幅值相位结果，如下表1所示。

表 1. 仿真信号谐波参数估计值

Tab1.Estimated value of parameters of simulation harmonic signal

谐波参数	实际值	无噪声		SNR=30dB		SNR=25dB		SNR=20dB	
		MUSIC法	求根法	MUSIC法	求根法	MUSIC法	求根法	MUSIC法	求根法
频率/HZ	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
幅值	3.0	3.0	3.0	2.9997	2.9999	2.9993	2.9993	3.0042	3.0010
相位/°	0	0	0	0.0041	0.00034	0.0034	0.01409	0.03083	0.02769
整数次谐波	频率/HZ	100	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
	幅值	0.3	0.3	0.3	0.30059	0.300069	0.29804	0.29769	0.303086
	相位/°	30	30	30	30.05244	30.00736	29.9597	29.9705	30.30975
	频率/HZ	200	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0
	幅值	0.2	0.2	0.2	0.20132	0.20039	0.201413	0.20029	0.201212
	相位/°	22.5	22.5	22.5	22.5698	22.51599	22.8132	22.53738	22.9431
间谐波	频率/HZ	40	40	40	39.9478	39.965	38.785	39.7282	38.6275
	幅值	0.02	0.02	0.02	0.02001	0.01999	0.0173	0.020154	0.01566
	相位/°	60	60	60	62.82036	60.0993	51.4895	61.06188	46.54384
	频率/HZ	125	125	125	124.8698	124.9872	126.5639	125.7635	123.6852
	幅值	0.1	0.1	0.1	0.09987	0.100035	0.09332	0.98373.	0.12124
	相位/°	45	45	45	46.56669	45.1545	44.6435	45.1712	49.0514
	频率/HZ	210	210	210	209.3586.	209.7986	211.5763	210.3956	207.3724
	幅值	0.03	0.03	0.03	0.02799	0.029855	0.02646	0.029787	0.03619
	相位/°	20	20	20	21.06962	20.58445	18.3197	20.4838	16.69032

由上表可以看出，整数次谐波时，无论用MUSIC法还是本文的特征空间求根法，都可以得到较为精确的参数估计，但当间谐波时尤其在噪声情况下，使用本文方法不仅使频率估计偏差减小而且使数据精度有了明显的提高。当得到频率估计后，可以进行一定的滤波措施，由于MUSIC法在低信噪比的情况下出现的虚假噪声，使滤波效果不是很好，从而通过式(16)计算得到的幅值和相位估计存在较大的偏差。使用本文求根法，即使在低信噪比的情况下频率估计也较精确，从而进行滤波去噪后幅值和相位计算结果也有很好的精度。

从幅值相位估计结果可以看出，通过本文的三角回归法，当频率有较小的偏差，求得的幅值和相角偏差也不大，稳定性好，其频率与振幅还有相角偏差关系如下图3所示

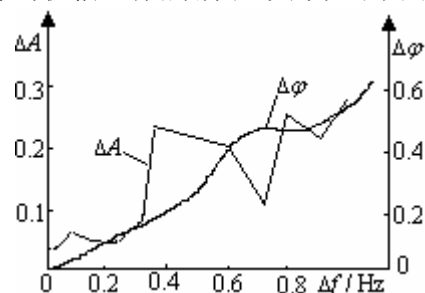


图3. 频率与振幅和相角偏差关系曲线  
Fig3. Amplitude-frequency error and

## 4 结论

(1)应用特征值分解理论将信号分解为信号子空间与噪声子空间,利用这两个子空间的正交性构造多项式,通过单位圆上根的求解得到频率估计,大大提高频率分辨率。

(2)本文方法不受噪声空间个数的限制,不需要通过复杂的信号子空间阶数的准确估计,只需对特征空间多项式根的幅值进行阈值限制,即使在低信噪比情况下也可以得到频率精确估计,不产生虚假频率。

(3)本文通过对自相关矩阵修正特征空间求根得到频率估计,与MUSIC法相比,经过仿真验证,不仅在无噪声情况下,而且在噪声尤其在低信噪比情况下,频率估计偏差不仅减小而且精度也大大提高,显示出良好的频率估计性能。

(4)在得到频率估计后,通过三角回归法,解超定方程组得到幅值和相角的估计值,此方法在频率误差不大时,求得幅值和相角误差也不大,稳定性较好。本文是采用镜像映射法求解此方程,但求解方法不只这一种,可以选择更为合适的方法得到更好的效果。

### 参考文献:

- [1] R. Carbone etc. Harmonic and Interharmonic Distortion in Current Source Type Inverter Drives. Proceedings of IEEE ICHPS VI, 1994, pp117-124
- [2] Gunther E W. Interharmonics in Power Systems [A ]. IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, 2001.15-19.
- [3] 林海雪. 电力系统中的间谐波问题[J]. 供用电, 2001, 18(3): 6-9  
LIN Hai-xue. Interharmonics in Electrical Power System [J]. Distribution & Utilization, 2001, 18(3): 6-9.
- [4] 张伏生, 耿中行, 葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(3): 63-66.  
ZHANG Fu-sheng, GENG Zhong-xing, GE Yao-zhong. FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in power system [J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(3): 63-66.
- [5] 祁才君, 王小海. 基于插值 FFT 算法的间谐波参数估计[J]. 电工技术学报, 2003, 18(1): 92-95.  
QI Cai-jun, WANG Xiao-hai. Interharmonics Estimation Based on Interpolation FFT Algorithm [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2003, 18(1): 92-95.
- [6] 薛慧, 杨仁刚. 基于 FFT 的高精度谐波检测算法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(1): 106-110.  
XUE Hui, YANG Ren-gang. Precise Algorithms for Harmonic Analysis on FFT Algorithm [J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(1): 106-110.
- [7] 薛慧, 杨仁刚. 利用 Morlet 连续小波变换实现非整次谐波的检测[J]. 电网技术, 2002, 12(26): 41-44.  
XUE Hui, YANG Ren-gang. Morlet Wavelet Based Detection of Noninteger Harmonics [J]. Power System Technology, 2002, 12(26): 41-44.
- [8] 薛慧, 杨仁刚. 基于连续小波变换的非整数次谐波测量方法[J]. 电力系统自动化, 2003, 5(27): 49-53.  
XUE Hui, YANG Ren-gang. A Novel Method for Non-integer Harmonics Measurement Using Continuous Wavelet Transform [J]. Automation of Electric Power System, 2003, 5(27): 49-53.
- [9] 马秉伟, 周莉, 刁均伟. 基于现代谱估计方法的间谐波检测[J]. 继电器, 2005, 3(33): 25-27  
MA Bing-wei, ZHOU Li, DIAO Jun-wei, Interharmonics Measurement using modern spectral estimation method [J]. Relay, 2005, 3(33): 25-27.
- [10] 石敏, 吴正国, 尹为民. 基于多信号分类法和普罗尼法的简谐波参数估计[J]. 电网技术, 2005, 15(29): 72-77.  
SHI Min, WU Zhen-guo, Yin Wei-min. Inter-harmonics Parameter Estimation Based on Multi-signal Classification and Prony Method [J]. Power System Technology, 2005, 15(29): 81-84.
- [11] 皇甫堪, 陈建文, 楼生强. 现代数字信号处理 [M]. 电子工业出版社, 2003.  
HUANG Fu-kan, CHEN Jiang-wen, LOU Sheng-qiang. Modern Digital Signal Processing. Publishing House of Electronics Industry Press, 2003.

沈睿佼 (1982-), 女, 研究生, 主要研究电力谐波分析与控制技术。Email: srj\_2004@sina.com

杨洪耕 (1949-), 男, 教授, 主要研究电能质量分析与控制技术。